Proposition de stage :
Génération de champs de vecteurs avec une méthode multigrille

Thématiques : Géométrie numérique, analyse numérique de la géométrie
Encadrant : Etienne Corman
Laboratoire : LORIA à Nancy
Équipe : PIXEL
Durée : 5 à 6 mois

Contexte

La génération de champs de vecteurs est une étape importante pour de nombreuses applications d'analyse numérique de la géométrie comme la simulation de cheveux, la génération de texture (Figure 1) ou la génération de maillage. Cette étape peut être particulièrement couteuse dans le cas de surface très complexes décrites par de nombreux points. En particulier, déterminer précisément les zéros (points singuliers) d'un champ de vecteurs nécessite une haute définition et donc un fort temps de calculs. L'objectif de ce stage est d'améliorer les performances de la génération des champs de vecteurs pour des objets plans grâce à une méthode multigrille.

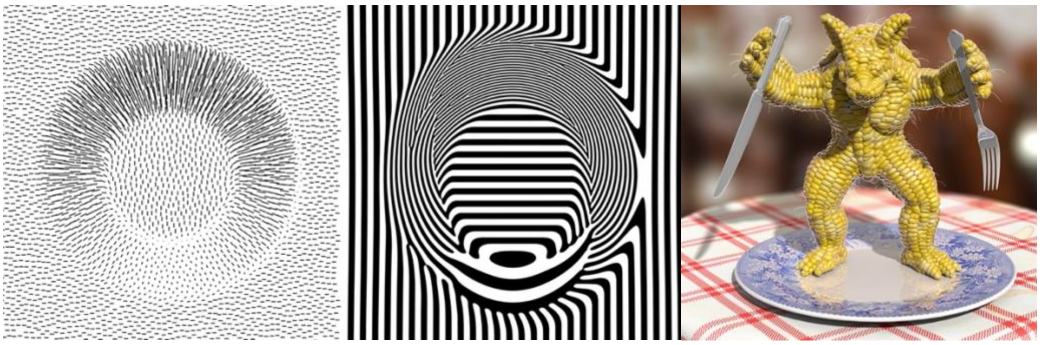

Figure 1 : Un champ de vecteurs (gauche) permet de générer une texture dont les bandes suivent la direction et la norme du champ (milieu). La même technique est appliquée à une surface 3D avec une texture de maïs (droite) [1].

Objectifs du stage

La génération de champs de vecteurs, dans sa version la plus simples, revient à interpoler des données au bord vers l'intérieur du domaine. Ainsi, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on cherche un champ de vecteurs $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ tel que $v = u$ au bord $\partial\Omega$ du domaine. L'interpolation s'effectue en recherchant un champ lisse. Une façon efficace d'y parvenir est de résoudre l'équation de Laplace avec des conditions de Dirichlet :

$$\Delta v(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega,$$
$$v(x) = u(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega.$$

L'avantage des domaines plans est que le Laplacien peut être simplement discrétisé avec des différences finies sur une grille régulière de taille h :

$$(\Delta v)_{ij} = \frac{1}{h^2}(v_{i-1j} + v_{ij-1} + v_{ij+1} + v_{i+1j} - 4v_{ij}).$$

La difficulté réside dans la discrétisation des contraintes car la grille ne suit pas le bord du domaine (Figure 2). La résolution de cette EDP s'effectuera de manière efficace avec un solveur linéaire de type multigrille. Cette méthode résout un système linéaire à différente résolution de la grille pour faire diminuer le résidu du système linéaire [2].

Par ailleurs, les applications de génération de maillages ou de placage de texture nécessitent le plus souvent des champs de vecteurs unitaires. Cela ajoute la contrainte non-linéaire $|v(x)| = 1$ en tous points du domaine à l'exception de certains points singuliers. L'apparition de points singuliers est nécessaire pour prendre en compte certaines conditions aux bords. Ce type d'équations non-linéaires peut être résolues grâce à la fonctionnelle de Ginzburg-Landau [3] :

$$\min_{v:\Omega\to\mathbb{R}^2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (|v|^2-1)^2,$$

pour ε tendant vers zéro. La localisation précise des points singuliers et la discrétisation de l'énergie de Ginzburg-Landau nécessitent une analyse fine de la taille de la grille.

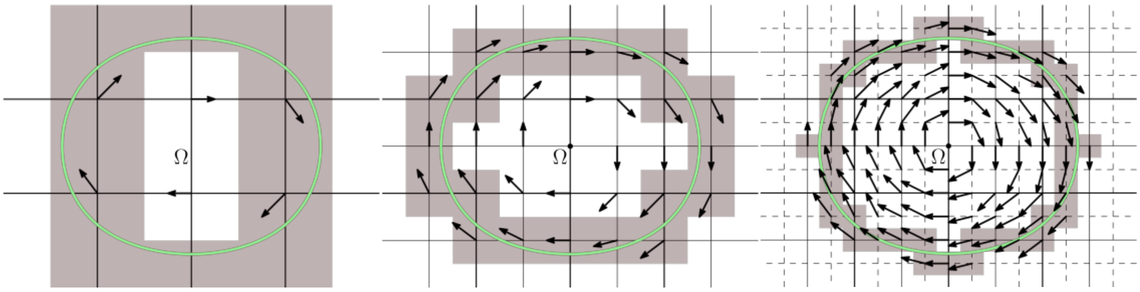

Figure 2 : Exemple d'un champ de vecteurs tangent au bord du domaine Ω (en vert) pour trois résolutions de grille. Les carrés rouges indiquent les cellules influencées par les contraintes au bord.

Durant ce stage, l'étudiant devra :

- Résoudre l'équation de Laplace sur une grille avec des conditions de Dirichlet adapté à un bord arbitraire ;
- Mettre en œuvre un solveur multigrille pour résoudre efficacement une EDP linéaire ;
- Adapter cette méthode pour les champs de vecteurs unitaires ;
- Étudier l'utilité de cette approche pour résoudre des problèmes de génération de textures.

Cadre du stage

Le stage se déroulera au sein de l'équipe PIXEL du LORIA (E Corman). L'équipe est PIXEL est spécialisée dans la génération de maillage quadrangulaires et hexaédriques.

Compétences recherchées

La principale qualité attendue est l'envie d'apprendre et de travailler en équipe. Être à l'aise et intéressé par les aspects mathématiques du problème. Une bonne intuition géométrique en 3D est un plus. La programmation se fera en MATLAB ou Python.

Bibliographie

[1] F. Knöppel, K. Crane, U. Pinkall et P. Schröder, «Stripe patterns on surfaces,» *ACM Transactions on Graphics,* 2015.

[2] W. Briggs, V. E. Henson et S. McCormick, A multigrid tutorial, SIAM, 2000.

[3] P.-A. Beaufort, J. Lambrechts, F. Henrotte, C. Geuzaine et J.-F. Remacle, «Computing cross fields A PDE approach based on the Ginzburg-Landau theory,» *Procedia engineering,* 2017.